3) pour $n \geq 1$; $U_n = \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^n-2^n} = \frac{3-2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

EXERCICE№17

1) $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = a_n^2 + a_n \ , \ n \geq 0 \end{cases}$

* pour n = 0 on a : $a_0 \geq 0$ (vraie)

***supposons que :** $a_n \geq n$; montrons que : $a_{n+1} \geq n+1$

$a_n \geq n \Rightarrow a_n^2 \geq n^2$ d'où : $a_n^2 + a_n \geq n^2 + n$

$\Rightarrow a_{n+1} \geq n(n+1)$ d'où : $a_{n+1} \geq n+1$

* **conclusion :** $a_n \geq n$ pour tout $n \in IN$; $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$

2) – a) *) pour n = 0 , on a : $-1 \leq b_0 \leq 0$

* supposons que : $-1 \leq b_n \leq 0$, montrons que : $-1 \leq b_{n+1} \leq 0$

$-1 \leq b_n \leq 0 \Rightarrow 0 \leq b_n + 1 \leq 1 \Rightarrow 0 \geq b_n(b_n+1) \geq b_n$

$\Rightarrow -1 \leq b_n \leq b_{n+1} \leq 0$ d'où : $-1 \leq b_{n+1} \leq 0$

* **conclusion :** $-1 \leq b_n \leq 0 \ \forall n \in IN$

b) $b_{n+1} - b_n = b_n^2 \geq 0 \Rightarrow b_{n+1} \geq b_n$ d'où : (b_n) est croissante.

c) (b_n) est croissante et majorée par 0 , elle est donc convergente.

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n$

$-1 \leq b_n \leq 0 \Rightarrow \ell \in [0,1]$

On a : $b_{n+1} = f(b_n)$ avec $f(x) = x^2 + x$

F est continue sur [0,1] d'où $\ell = f(\ell) \Leftrightarrow \ell^2 + \ell = \ell \Leftrightarrow \ell^2 = 0$

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$

EXERCICE№18

$\begin{cases} U_0 = 0,1 \\ U_{n+1} = 1,6U_n.(1-U_n) \end{cases}$

1) $f(x)=1,6.x.(1-x) \Rightarrow f'(x) = 1,6.[1-2x]$

x	$-\infty$	½	$+\infty$
f'(x)	+	0	-
f(x)	$-\infty$ ↗	0,4	↘ $-\infty$

Qarray.tn - Aqra Blech - Qarray.tn